**Аннотация рабочей программы по нелинейным уравнениям**

**в частных производных.**

(

**I. Разделы дисциплины**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Некоторые классические нелинейные уравнения, возникающие в прикладных вопросах: уравнение 1-го порядка нелинейных волн, уравнение Клейна-Гордона, синус-уравнение Гордона, уравнения Бюргерса, Буссинекса, Кортевига- де Фриза, Шредингера (нелинейное), Гинзбурга-Ландау, система Навье-Стокса и другие.  |
| 2 | Вариационные методы доказательства разрешимости краевых задач:  1.1-я вариация по Лагранжу, уравнение Эйлера-Лагранжа для экстремальной задачи, векторный случай; примеры – принцип Дирихле для краевой задачи для ур.Пуассона, обобщенный принцип Дирихле, нелинейное уравнение Пуассона, уравнение минимальных поверхностей (проблема Плато).2. Теорема представления Рисса. Теорема Лакса-Мильграма.3. Условия коэрцитивности и полунепрерывности снизу для целевого функционала. Существование минимизирующей последовательности. |
| 3 | Методы монотонности: 1.Определение различного типа монотонностей для операторов. Их простейшие свойства. Теорема Браудера-Минти. 2. Доказательство однозначной разрешимости методом монотонных операторов на примере конкретной краевой задачи. |
| 4 | Общая схема проекционных методов (метода Галеркина). Конкретизация на примере какой-либо краевой задачи для нелинейного уравнения в частных прозводных – конечномерная аппроксимация, теоремы компактности, предельный переход.  |
| 5 | Топологические теоремы о неподвижных точках: теоремы о неподвижной точке для строго сжимающих отображений, теоремы о неподвижной точке для компактных отображений, теоремы о неподвижной точке для операторов, сохраняющих порядок. Применение к задачам для конкретных нелинейных уравнений теоремы Банаха о неподвижной точке, теорем Шаудера и Шефера о неподвижной точке. Порядок решения, метод субрешений и суперрешений. |

**II.Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

 В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть следующими компетенциями:

способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (ПК-1);

способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2);

способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3);

**III. Литература**

1. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики-М.;физ-мат литература,2000.
2. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.-М.; Наука, 1982
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики-М.,МЦНМО, 2001
4. Сборник задач по уравнениям с частными производными под ред. Шамаева А.С, - М., БИНОМ, 2005
5. Агранович М.С. Обобщенные функции-М., Изд.МЦНМО, 2008
6. Егоров Ю.В., Шубин М.А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.-М., ВИНИТИ,1988
7. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными, 2003

**Аннотация рабочей программы по обобщенным функциям**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |   *С О Д Е Р Ж А Н И Е*  | часы | лит |
| Л. | С. |
| 1 | Истоки понятия обобщенной функции (о.ф.): 1.задача Коши для 1-мерного волнового уравнения с не дифференцируемыми начальными данными; 2.задачи из физики. Семейства δ-образных функций. Решение уравнения с правой частью и решение задачи Коши. | 2 |  |  |
| 2 | Элементы теории линейных топологических пространств (лтп): 1.Линейные пространства; выпуклые, закругленные множества; выпуклая оболочка, абсолютно выпуклая оболочка; поглощающие множества. 2Лтп; гомеоморфизмы ; база топологии, критерий того, что некоторая система подмножеств является базой топологии, порожденной ею; база окрестностей точки; задание топологии в лтп заданием базы окрестностей нуля. 3.Ограниченные множества. Топология на лтп, порожденная полунормой. Инициальная топология. Полинормированные пространства. Локально выпуклые пространства (лвп). Функционал Минковского . Случаи, когда - полунорма , норма. Критерий непрерывности . Всякое лвп есть полинормированное пространство. Счетно-нормированные пространства (сч-н п.). Критерий эквивалентности двух систем полунорм. Система неубывающих полунорм в сч.-н.п., эквивалентная исходной ; для любого непр. лин. на сч.-н.п. функционала непрерывен в . Метризуемость сч-н.п.. Критерий метризуемости лвп. Критерий нормируемости отделимого лтп (теорема Колмогорова).  |  |  |  |
| 3 | Принцип построения обобщенных функций. Пространства основных функций E(Ω) , D(Ω) , S(): 1.Пространство E(Ω) счетно-нормируемо и полно. 2.Множество  не замкнуто в E(Ω). Пространство , его счетная нормируемость и полнота. Топология на , порожденная несчетной системой полунорм  . Условие , эквивалентное сходимости  к ϕ в D(Ω). Полнота и неметризуемость D(Ω). 3.Эквивалентные системы полунорм в S(). Полнота S(). 4.Простейшие соотношения между пространствами основных функций. |  |  |  |
| 4 | Пространства обобщенных функций (о.ф.). Примеры о.ф.. Регулярные и сингулярные о.ф.. Лемма дю Буа-Реймонда. Её аналог для мер. Сильная , слабая , \*-слабая топологии на пространстве , сопряженном некоторому ЛТП. Полнота в \*-слабой топологии пространств о.ф..  |  |  |  |
| 5 | Свертка  ф-ций , где suppg⊂⊂.Док-во соотношения . Ядро усреднения , ф-ция средняя от u. Её св-ва : 1. 2.(Ω-огр.обл.в ,  при и мультииндекса α в случае существования ),-оператор усреднения. 3.   равномерно на любом шаре из ) 4.  равномерно в Ω). 5. ⇒  при ). |  |  |  |
| 6 | Равенство о.ф. нулю в области , в точке. Носитель о.ф..Теорема о разбиении единицы. Если о.ф. равна нулю в каждой точке области, то она равна нулю в этой области (и обратно).Любой элемент из есть о.ф. с компактным носителем.Плотность D(Ω) в . Плотность D(Ω) в. |  |  |  |
| 7 | Формула интегрирования по частям и дифференцирование о.ф.. Примеры. Простейшие дифференциальные уравнения в пространствах о.ф.. Примеры. |  |  |  |

**Аннотация рабочей программы по методам интегральных преобразований в математической физике.**

**I. Разделы дисциплины**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 1. Некоторые интегральные преобразования.

Преобразование Фурье на  и . Преобразования Лапласа, Меллина, Гильберта, Ханкеля. Связь между ними.  |
| 2 | 2.Решение задачи Коши для n-мерных уравнений колебаний, теплопроводности, Кортевига-де-Фриза линеаризованного, решение задачи Дирихле на полупространстве и других с помощью преобразования Фурье. Исследование единственности решений. |
| 3 | 1. Решение краевых задач для уравнения

С помощью интегрального преобразования типа |
| 4 | Пр. Ф. над пр-вом о.ф. умеренного роста . Пр. Ф. свертки 2-ух о.ф..Пр.Ф. произведения  , где ∈  , ∈ ;  , u ∈ , P-полином. Примеры  |
| 5 | Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем, бесконечная дифференцируемость, продолжимость до целой функции, теорема Пэли-Винера-Шварца, преобразование Фурье-Лапласа. Задача Коши для ур.вида , с начальной функцией из класса аналит.ф-ций с некоторыми ограничениями на рост на бесконечности. Общая схема решения, частные случаи. Теоремы существования и единственности решений. |
| 6 | 1. Преобразование некоторых нелинейных уравнений в линейные и формулы представления решений для них.
 |

**II.Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

 В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть следующими компетенциями:

способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (ПК-1);

способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2);

способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3);

**III. Литература**

1. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики-М.;физ-мат литература,2000.
2. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.-М.; Наука, 1982
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики-М.,МЦНМО, 2001
4. Сборник задач по уравнениям с частными производными под ред. Шамаева А.С, - М., БИНОМ, 2005
5. Агранович М.С. Обобщенные функции-М., Изд.МЦНМО, 2008
6. Егоров Ю.В., Шубин М.А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.-М., ВИНИТИ,1988
7. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными, 2003

**Аннотация рабочей программы дисциплины «Пространства Соболева и обобщенные решения краевых задач»**

(магистры, профиль дифференциальные уравнения)

Понятие обобщенного решения краевой задачи, возникшее при анализе разрывных решений, явилось источником мощного метода получения теорем существования и единственности решений краевых задач. Идея метода заключается в том, что ищется класс функций, определив соответствующим образом решение рассматриваемой задачи, в котором оно единственно и существует. При этом возникают вопросы придания смысла краевым условиям для рассматриваемых функций (обобщенных). Далее исследуется гладкость полученных решений. Формализация и обобщение этой процедуры приводит к понятию пространства Соболева.

1. Цели изучения:

Дать представление об абстрактном основании современной теории уравнений с частными производными и ее некоторых конкретных методах.

Задачи изучения:

Освоение следующих разделов:

 1. Пространства . Основные неравенства, сопряженные пространства, свертка и усреднение, теоремы вложения и компактности.

2.Линейные топологические пространства. Полинормированные, локально выпуклые пространства. Метризуемость и нормируемость. Пространства основных функций. Пространства обобщенных функций.

3. Регулярные, сингулярные обобщенные функции. Свертка, усреднение, вопросы плотности. Преобразование Фурье.

4. Определение пространств Соболева и их основные свойства. Теоремы вложения, плотности, компактности.

5. Продолжение на более широкую область, теоремы о следах.

6.Общий принцип и конкретные примеры приложений пространств Соболева к уравнениям в частных производных.

2.Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения специалист должен:

иметь представление: об общих принципах построения обобщенных функций; различных эквивалентных подходах к определению пространств Соболева; пространствах Соболева с дробным показателем, свойствах аппроксимации, продолжения, компактности и методах приложения пространств Соболева при анализе краевых задач.

 знать: основные свойства пространств Лебега, пространств Гельдера, линейных топологических пространств, пространств Соболева, условия существования и единственности решений в Соболевских пространствах известных краевых задач.

 уметь: строить пространства X, Y и оператор, соответствующий заданной краевой задаче, применять общие принципы функционального анализа к ним; дифференцировать обобщенные функции, применять преобразование Фурье.

приобрести навыки: в применении преобразования Фурье, теории операторов, обобщенных функций к уравнениям с частными производными.

 владеть, иметь опыт: решения краевых задач в пространствах Соболева, исследования гладкости обобщенных решений.

**Аннотация рабочей программы дисциплины**

 **«Прикладной функциональный анализ и интегральные уравнения»**

**Цель** учебной дисциплины: формирование общей точки зрения по вопро­сам исследования задач для дифференциальных уравнений и систем диффе­ренциальных уравнений с частными производными, овладение основами ме­тодологии научных исследований в рамках данной дисциплины, формирова­ние профессиональной готовности к самостоятельной научно­исследовательской и педагогической деятельности, углубленное изучение ме­тодов математического исследования основных задач данной теории.

**Задачами** изучения дисциплины являются:

* сформировать у магистров современные теоретические представления о методах исследования задач теории уравнений с частными производными при помощи аппарата функционального анализа;
* развить логическое мышление;
* сформировать навыки самостоятельной практической работы в области дифференциальных уравнений с частными производными, применения по­лученных знаний для решения задач смежных дисциплин;

**II. Разделы дисциплины**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№****п/п** | **Раздел****Дисциплины** | **Всего** | **Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)** | **Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*****Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*** |
| **Модуль 1. Основные классы пространств** |
| 1 | **Раздел 1.** Анализ в линейных нормированных пространствах  | 12 | 3 | 3 | 6 | Контрольная работа, |
| 2 | **Раздел 2.** Теоремы о неподвижных точках | 12 | 3 | 3 | 6 | Контрольная работа,  |
| 3 | **Раздел 3.** Гильбертовы пространства. Наилучшее приближение | 12 | 3 | 3 | 6 | Коллоквиум |
|  | **Итого** | 36 | 9 | 9 | 18 |  |
|  **Модуль 2. Линейные операторы** |
| 4. | **Раздел 4.** Линейные ограниченные операторы и функционалы | 12 | 3 | 3 | 6 | Контрольная работа |
| 5. | **Раздел 5.** Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра | 12 | 3 | 3 | 6 | Контрольная работа |
| 6. | **Раздел 6.** Элементы спектральной теории операторов | 12 | 3 | 3 | 6 | Коллоквиум |
|  | **Итого** | 36 | 9 | 9 | 18 |  |
|  | **ИТОГО** | **72** | **18** | **18** | **36** |  |

* создать основы для более эффективного изучения конкретных математиче­ских дисциплин на последующих стадиях обучения, для самостоятельного исследования рассматриваемых проблем.

**Аннотация рабочей программы по теории экстремальных задач.**

**1.Цели и задачи изучения дисциплины**

Задачи на отыскание наибольших и наименьших величин являются актуальными на протяжении всей истории человечества. Возникнув в глубокой древности, список экстремальных задач постоянно пополнялся, способствуя возникновению соответствующих математических теорий. Рассмотреть большинство этих теорий с единой точки зрения позволяет принцип Лагранжа.

 **Цели изучения :**

Дать представление о современном уровне развития вариационного исчисления и методов оптимизации, ознакомить студентов с некоторыми ее методами, имеющими, определяющий развитие теории, характер.

**Задачи изучения:**

Освоение студентами следующих разделов:

 1. Старинные экстремальные задачи, задачи на максимум и минимум из элементарной геометрии, вариационный принцип Ферма в геометрической оптике и закон Снеллиуса и другие простые задачи.

2. Формализация экстремальной задачи. Примеры: задача о брахистохроне, аэродинамическая задача Ньютона, изопериметрическая задача, задача о минимальной поверхности тела вращения, задача о быстродействии, транспортная задача и другие.

 3.Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Конкретизация общего определения производной по Фреше в случаях , , . Конечномерная гладкая задача без ограничений.

 4. Производная по вектору. Конечномерная гладкая задача с ограничениями типа равенств. Другие различные подходы к определению производной (1-я вариация, производная Гато, сильная дифференцируемость)

5. Простейшая задача классического вариационного исчисления, задача Больца, изопериметрическая задача. Задача со старшими производными.

6. Задачи оптимального управления.

7. Линейное программирование. Экономическая интерпретация. Симплекс – метод.

8. Выпуклые задачи. Двойственность. Субдифференциал. Сопряженные функции.

**2.Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

В результате изучения вариационного исчисления и методов оптимизации должен:

***иметь представление:*** об основных типах экстремальных задач, общих принципах решения их; условиях существования и отсутствия решений, различных формулировках принципа Лагранжа, достаточных условиях экстремума в вариационном исчислении, методах выпуклой оптимизации. принципе Понтрягина, экономических и технических приложениях, методах негладкой оптимизации.

 **знать:** постановки основных задач, необходимые условия существования их решений, достаточные условия, принцип Лагранжа для каждой из этих задач, симплекс-метод,.

**уметь:** находить производную по вектору,1-ю вариацию, вариацию по Лагранжу, производную Гато, производную Фреше, строгую производную, субдифференциалы конкретных отображений, решать простейшую задачу классического вариационного исчисления с неподвижными и подвижными концами, задачу Больца, задачу со старшими производными, изопериметрическую задачу, многомерные вариационные задачи, задачи оптимального управления.

**приобрести навыки:**  в применении принципа Лагранжа к различным задачам, в доказательстве существования решений экстремальных задач, в применении принципа максимума Понтрягина.

**владеть, иметь опыт:** владеть стандартными методами доказательства существования решения экстремальных задач; иметь опыт формализации экстремальных задач и их решений методом Лагранжа .

 В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть следующими компетенциями:

способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (ПК-1);

способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2);

способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3);

**3. Литература**

***Основная:***

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.М,:Наука,1979.
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации.М,:Наука,1984.
3. Оптимальное управление под ред. Н.П.Осмоловского и В.М.Тихомирова .М.: издательство МЦНМО,2008.

***Дополнительная:***

1. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: УРСС, 2006.
2. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач.М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Босс В. Лекции по математике.Т.7. Оптимизация.М.:URSS, 2007

|  |
| --- |
|  |

**Аннотация рабочей программы дисциплины
«Оптимальное управление распределенными системами»**

Оптимальное управление распределенными системами, т.е. системами, описываемыми краевой задачей для уравнений с частными производными или для систем таких уравнений, рассматривает задачи вида:

 (1)

где y- решение некоторой краевой задачи для уравнения с частными производными, u-краевые условия, которые меняются (управление) с соблюдением указанных ограничений.

 При рассмотрении таких задач используется весь арсенал методов современной теории уравнений с частными производными и методы оптимального управления, в особенности, принцип Лагранжа. Как следствие решения задач типа (1) могут получаться новые результаты по краевым задачам. Задачи типа (1) занимают обширную часть приложений математики.

1. **Цели изучения:**

Дать представление о применении современных методов теории уравнений с частными производными и оптимального управления к конкретным задачам и некоторых задачах, рассматриваемых в современной математике, методах их решения.

**Задачи изучения:**

Освоение следующих разделов:

 1.Принцип компактности Вейерштрасса-Лебега для полунепрерывной функции. Секвенциально слабая замкнутость, теорема Мазура и его следствия, коэрцитивная задача, принцип компактности существования точки минимума.

2. Элементы пространств Соболева. Теорема Тонелли о существовании решения в 1-мерной вариационной задаче. Необходимые условия экстремума.

3. Абстрактная нелинейная задача управления. Условия существования решения. Конкретные примеры. Система оптимальности.

 4. Линейные стационарные экстремальные задачи. Распределенное управление. Граничное управление. Некорректные управляемые системы. Управление в задаче Коши для оператора Лапласа. Задачи оптимального управления, связанные с линейными параболическими уравнениями..

5. Принцип Лагранжа для абстрактной задачи. Система оптимальности. Оптимизация задачи Коши для оператора Лапласа.

6. Разрешимость задачи Коши для эллиптических уравнений для плотного множества начальных данных.

**2.Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

В результате изучения слушатель должен:

***иметь представление:*** о различных методах вывода системы оптимальности; различных типах управления и задач, методах их анализа; методах исследования управляемой системы, когда краевая задача корректна, сингулярна, некорректна; основных результатах по существованию решений, системам оптимальности для известных прикладных задач.

 **знать:** абстрактные схемы задач управления, принцип Лагранжа в различных случаях, постановки основных прикладных задач управления распределенными системами, условия существования решений для основных задач.

 **уметь:** определять условия существования решения экстремальных задач, выводить системы оптимальности.

**приобрести навыки:**  в применении абстрактной схемы задач управления, в применении различных вариантов принципа Лагранжа для вывода систем оптимальности.

 **владеть, иметь опыт:** анализа экстремальных задач для распределенных систем, применяя принцип компактности, абстрактную схему задач управления, принцип Лагранжа, метод штрафных функций и решая краевую задачу (корректную) с последующей подстановкой в целевую функцию.